

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Представления групп и алгебр Ли
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Л. Городенцев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 23.03.2023

Аннотация

Данный курс является продолжением курсов "Группы и алгебры Ли" и "Теория представлений" и посвящен в первую очередь классификациям полупростых групп и алгебр при помощи систем корней. Кроме того, будут изучены представления полупростых алгебр при помощи старших весов представлений. Если останется время, будут отдельно описаны представления групп $GL(n)$ и $SL(n)$

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Цель курса - изучить строение полупростых алгебр и групп Ли и классифицировать их представления.

Задачи дисциплины

- знание основных понятиях теории представлений алгебр Ли и групп Ли;
- умение решать различные конкретные задачи, пользуясь алгебрами Ли;
- приобретение навыков применения техники теории представлений в различных областях математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные понятия теории групп;
- основные понятия теории групп и алгебр Ли;
- примеры групп и алгебр Ли;
- взаимосвязи между свойствами групп Ли и соответствующими свойствами их алгебр Ли.

уметь:

- доказывать основные теоремы о группах и алгебрах Ли;
- применять полученные результаты для анализа конкретных примеров;
- понимать современную математическую литературу в данной области и ее применениях;
- задавать структуру группы Ли для конкретных групп;
- находить алгебры Ли для конкретных групп Ли;
- применять понятия и методы теории групп и алгебр Ли в научно-исследовательской работе.

владеть:

- понятийным аппаратом теории групп и алгебр Ли;
- навыками профессионального мышления, необходимыми для адекватного использования методов теории групп и алгебр Ли;
- навыками профессионального мышления, необходимыми для самостоятельного изучения математической литературы по данной тематике.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Группы и алгебры Ли	6	6		15
2	Полупростые алгебры Ли	6	6		15
3	Комплексные полупростые алгебры Ли	6	6		15
4	Существование и описание для классических алгебр Ли	6	6		15
5	Классификация полупростых комплексных алгебр Ли	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Группы и алгебры Ли

Определение представления. Присоединённое и тавтологическое представления. Простые и полупростые алгебры Ли. Абелевы алгебры Ли. Нормализаторы и централизаторы. Факторалгебра Ли. Автоморфизмы алгебры Ли. Структурная теория алгебр Ли. Универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Производный ряд. Разрешимость и нильпотентность. Теорема Энгеля.

2. Полупростые алгебры Ли

Теоремы Ли и Картана. Разложение Жордана-Шевалле. Критерий Картана. Компактные группы и алгебры Ли. Вполне приводимость представлений. Представления группы и алгебры $SL(2)$. Классификация неприводимых представлений $SL(2)$. Веса и старшие векторы. Описание представлений группы и алгебры $SL(3)$. Элемент Казимира представления. Теорема Вейля. Сохранение разложения Жордана. Картановская подалгебра.

3. Комплексные полупростые алгебры Ли

Вещественные формы, компактная форма. Полная приводимость представлений.

4. Существование и описание для классических алгебр Ли

Разложение на корневые подпространства. Централизатор картановской подалгебры. Система корней: свойства ортогональности, целочисленности и рациональности. Аксиоматика системы корней. Простые корни и группы Вейля. Классификация систем корней. Схемы Дынкина.

5. Классификация полупростых комплексных алгебр Ли

Представления $GL(n)$ и $SL(n)$. Представления полупростых комплексных алгебр Ли. Связь с многочленами Шура, разложение тензорных произведений. Двойственность Шура–Вейля. Конструкция представления с данным старшим весом: модули Верма. Формулы Вейля для характера и для размерности.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебры Ли и группы Ли [Текст] = Lie Algebras and Lie Groups : [учеб. пособие для вузов] / Ж. - П. Серр ; пер. с англ. и фр. А. Б. Волынского ; под ред. А. Л. Онищика .— М. : Мир, 1969 .— 376 с.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Математика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.Л. Горodenцев, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Представления групп и алгебр Ли» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия теории групп;
- основные понятия теории групп и алгебр Ли;
- примеры групп и алгебр Ли;
- взаимосвязи между свойствами групп Ли и соответствующими свойствами их алгебр Ли.

уметь:

- доказывать основные теоремы о группах и алгебрах Ли;
- применять полученные результаты для анализа конкретных примеров;
- понимать современную математическую литературу в данной области и ее применениях;
- задавать структуру группы Ли для конкретных групп;
- находить алгебры Ли для конкретных групп Ли;
- применять понятия и методы теории групп и алгебр Ли в научно-исследовательской работе.

владеть:

- понятийным аппаратом теории групп и алгебр Ли;
- навыками профессионального мышления, необходимыми для адекватного использования методов теории групп и алгебр Ли;
- навыками профессионального мышления, необходимыми для самостоятельного изучения математической литературы по данной тематике.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Рассмотрим $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_3$ — ортонормированный базис в пространстве R

3

, V — подпространство, ортогональное вектору $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, Γ — решётка, натянутая на $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$, т.е. $\Gamma = \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_4\varepsilon_4 \mid a_1, \dots, a_4 \in Z\}$,

Γ

$\Gamma' = \Gamma \cap V$,

$\Phi = \{\alpha \in \Gamma$

,

$\mid (\alpha, \alpha) = 2 \text{ или } 6\}$.

1.

а) Опишите вектора, входящие в Φ .

б) Покажите, что $\langle \alpha \mid \beta \rangle \in Z$ для любых $\alpha, \beta \in \Phi$.

в) Φ — система корней.

г) $\Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$ является системой простых корней в Φ .

д) Нарисуйте граф Кокстера для системы корней Φ .

2. (Группа Вейля) Опишите группу Вейля W системы корней Δ : сколько в ней элементов, чему она

изоморфна.

3. (Корни)

а) Сколько положительных корней есть в Φ ?

б) Найдите максимальный корень системы корней Φ .

4. (Доминантные веса)

а) Корень, принадлежащий неприводимой системе Φ доминантен если и только если это старший корень

или максимальный короткий корень.

б) Покажите, что следующие вектора образуют базис в системе доминантных весов:

$\lambda_1 = (2, 1); \lambda_2 = (3, 2)$.

5*. Для элемента $\sigma \in W$ обозначим через $l(\sigma)$ длину минимального представления в виде произведения

порождающих отражений $\sigma\alpha, \alpha \in \Delta$.

а) $l(\sigma)$ — количество положительных корней, которые σ переводит в отрицательные.

б) В группе W существует единственный элемент σ , который переводит Φ

\rightarrow в Φ

\rightarrow . Найдите $l(\sigma)$.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.